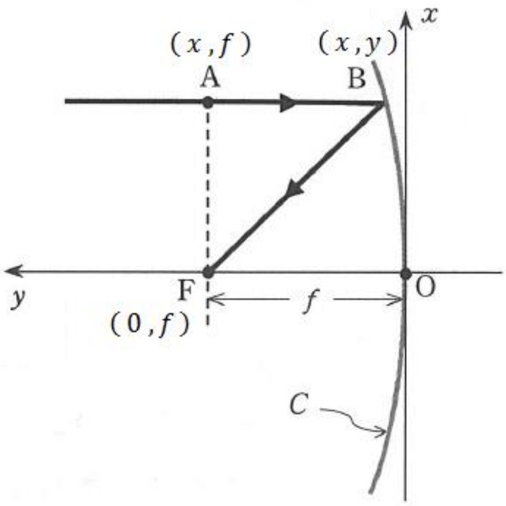
【1】早稲田大学基幹・創造・先進理工学部

[I]



①

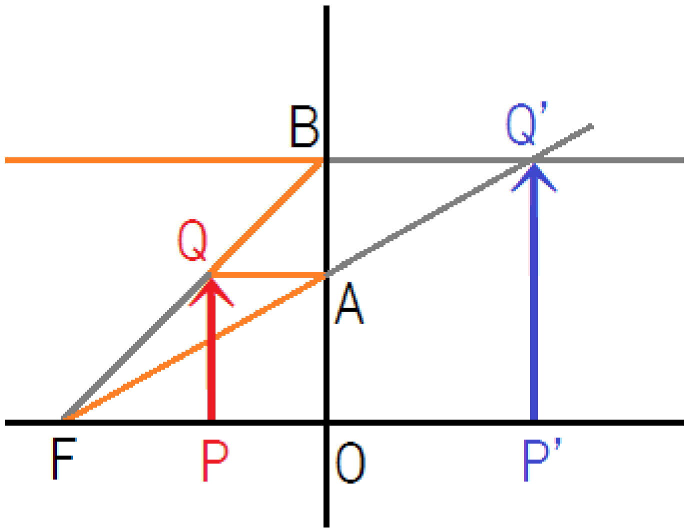
点 A，B および焦点 F の座標をそれぞれ $(x, f), (x, y), (0, f)$ とする。すると、AB 間距離は $f-y$、BF 間距離は $\sqrt{x^2+(f-y)^2}$ と分かる。

また、点 A から光軸に平行に入射する光の、点 F までの距離は x に依らず一定であるので、点 A が点 F と一致する場合 $(x=0)$ を考えると、以下の式が成り立つことが分かる。

$$f-y+\sqrt{x^2+(f-y)^2}=2f$$

$$\therefore \boldsymbol{y=\frac{1}{4f}x^2}$$

② 点 A，点 B は、点 O を通り主軸に垂直な直線上にあると近似できるので、図 2 は下図のように近似することができる。



ここで P'Q' = OB であり、△FPQ ∽ △FP'Q' であることから、以下のことが分かる。

$$\mathrm{FP}:\mathrm{FO}=\mathrm{PQ}:\mathrm{OB} \rightarrow (f-a):\mathrm{PQ}=f:\mathrm{OB}=f:\mathrm{P'Q'}$$

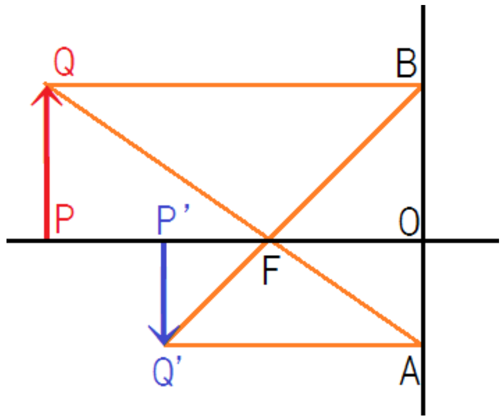
$$\therefore \mathrm{P'Q'}=\boldsymbol{\frac{f}{f-a}}PQ$$

③ 同様に PQ = OA であり、△FOA ∽△FP'Q' であることから、以下のことが分かる。

$$\mathrm{FO}:\mathrm{OA}=\mathrm{FP'}:\mathrm{P'Q'} \rightarrow a:\mathrm{OA}=(f+|\mathrm{OP'}|):\mathrm{P'Q'}$$

$$\rightarrow f+|\mathrm{OP'}|=a\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{P'Q'}}=a\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P'Q'}} \rightarrow \therefore\ \boldsymbol{|\mathrm{OP'}|=\frac{af}{f-a}}$$

④ ②や③と同様、点A，点Bは、点Oを通り主軸に垂直な直線上にあると近似できるので、図3は下図のように近似することができる。



ここで P'Q' = OA であり、△PQF ∽ △AOF であることから、以下のことが分かる。

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PF}=\mathrm{OA}:\mathrm{OF}\ \rightarrow \mathrm{PQ}:(b-f)=\mathrm{OA}:f=\mathrm{P'Q'}:f$$

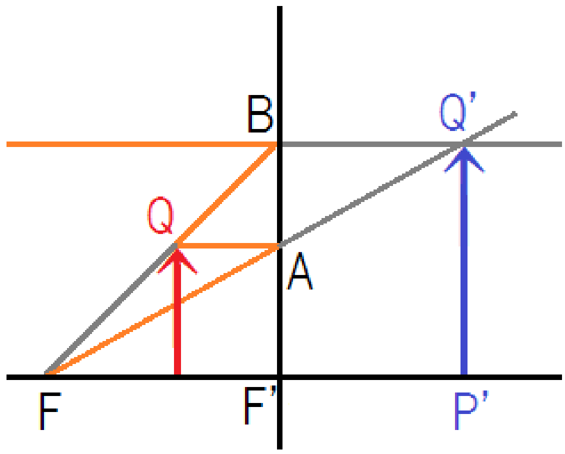
$$\therefore \mathrm{P'Q'}=\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{b-f}}PQ$$

⑤ ここで PQ = OB であり、△OBF ∽ △ABQ' であることから、以下のことが分かる。

$$\mathrm{OB}:\mathrm{OF}=\mathrm{AB}:\mathrm{AQ'}\ \rightarrow \mathrm{PQ}:f=(\mathrm{PQ}+\mathrm{P'Q'}):\ \mathrm{OP'}$$

$$\therefore \mathbf{OP'}=\frac{\boldsymbol{fb}}{\boldsymbol{b-f}}$$

⑥ 今までの結果を考慮すると、図 4 における凸面鏡 I によって形成される像P'Q'の様子は下図のようになる。像ができる位置は、下図のF'P'の長さに相当し、③の結果より、



$$|\mathrm{F'P'}|=\frac{(f-z)f}{f-(f-z)}=\frac{\boldsymbol{(f-z)f}}{\boldsymbol{z}}$$

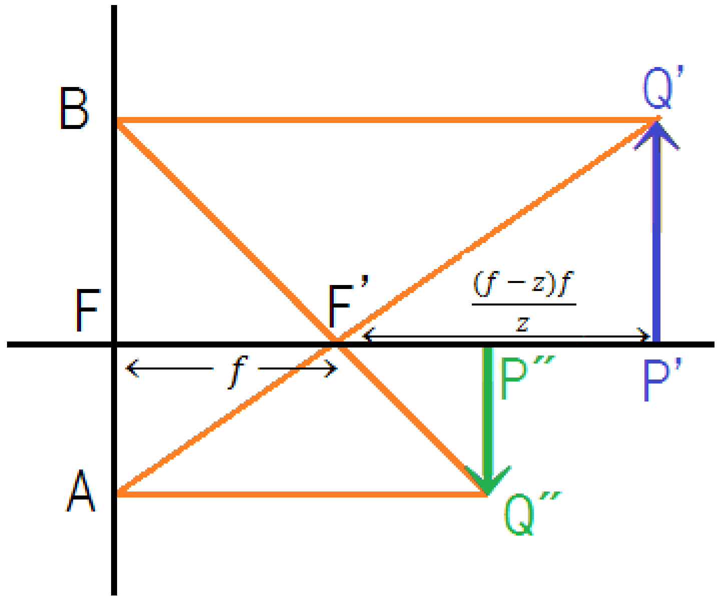
と求まる。

⑦ できる像の長さは、②より

$$\mathrm{P'Q'} = \frac{f}{f-(f-z)}\mathrm{PQ} = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{z}}\mathrm{PQ}$$

と求まる。

⑧ 凹面鏡Ｉでできた像に対して、凹面鏡Ⅱでの反射により像ができる。



鏡Ⅱから像のできる位置までの距離は、下図のFP"の長さに相当し、その長さは…

$$\therefore \mathbf{FP''} = \frac{f\frac{f^2}{z}}{\frac{f^2}{z}-f} = f\left(\frac{f}{f-z}\right) = f\left(\frac{f-z}{f}\right)^{-1} = f\left(1-\frac{z}{f}\right)^{-1} = f\left(1+\frac{z}{f}\right) = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{z}$$

と求まる。

⑨ $\triangle \mathrm{F'P'Q'} \backsim \triangle \mathrm{F'FA}$ であり、$\mathrm{P''Q''} = \mathrm{FA}$ であることから、以下の関係が成り立つ。

$$\mathrm{F'P'}:\mathrm{F'F} = \frac{(f-z)f}{z}:f = \mathrm{P'Q'}:\mathrm{FA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P''Q''} = \frac{z}{f-z}\mathrm{P'Q'} = \frac{z}{f-z}\frac{f}{z}\mathrm{PQ} = \frac{f}{f-z}\mathrm{PQ}$$

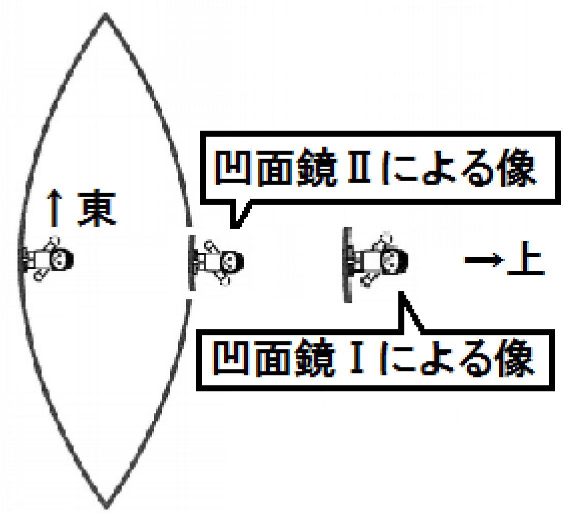
$$= \frac{1}{1+(-1)\frac{z}{f}}\mathrm{PQ} = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{f}\right)^{-1}}\mathrm{PQ} = \frac{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{f}}\mathbf{PQ}$$

⑩ 図 5 での実験を⑥～⑨の結果を基に検証する。すると、人形本体はPQ、人形の像は$P''Q''$に相当し、$z \ll f$ であることから、以下のことが分かる。

$$\therefore P''Q'' = \frac{f+z}{f}PQ \longrightarrow \frac{f+0}{f}PQ = PQ$$

これより、**身長と横幅がそれぞれほぼ同じの像ができる**ことが分かる。

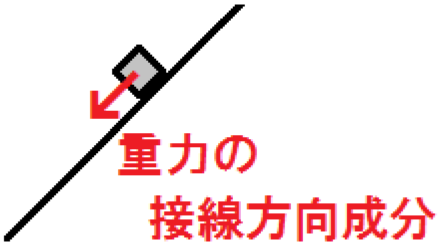
⑪ まず、図 5 中の人形は凹面鏡Ⅰによって正立な像を結び、さらにその虚像は凹面鏡Ⅱによって倒立な像を点 F から f だけ離れた位置で結ぶ(⑧参照)。このような像の様子は、下図のように表される。



これより、**この像は凹面鏡Ⅰの穴面に足をつけて、頭を上、足を下に向けている**ことが分かる。

⑫ さらに、**右手を顔の横に上げ、右手が西側に位置している**ことが分かる。

[Ⅱ]



問 1

物体と円筒の内面の間に摩擦が無い場合、物体に働く重力の接線方向は下図より、以下のように求まる。

$$f_1 = -mg\sin\theta = -mg\theta = -\boldsymbol{\frac{mg}{r}x}$$

（$\sin\theta = \theta$, $x = r\theta$ を用いた。）

問 2　物体の運動は単振動と見なせる。単振動する物体にかかる加速度をaとすると、物体における運動方程式は以下のようになる。

$$ma = -\boldsymbol{\frac{mg}{r}x}$$

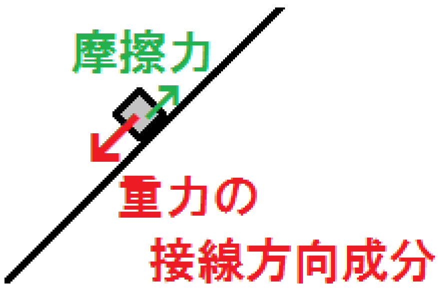
この物体の角振動数を ω とすると、加速度 a は x の関数 $\omega^2 x$ と表せる。よって上の式は以下のように変式できる。

$$m\omega^2 x = -\frac{mg}{r}x \ \rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

以上より、この単振動の周期 T は、以下のようにして表される。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}}$$

問 3　物体と円筒の間に摩擦がある場合を考える。



角度が θ_O になったとき、物体には最大静止摩擦力と重力の接線方向成分がかかり、この 2 力がつりあっているため、以下の式が成り立つ。

$$mg\sin\theta_O = \mu mg\cos\theta_O$$

以上より、次のことが分かる。

$$\tan\theta_O = \mu \Leftrightarrow \frac{\sin\theta_O}{\cos\theta_O} = \boldsymbol{\theta_O = \mu}$$

問 4　滑る物体に働く重力の接線方向と動摩擦力の合力 f_2 は、以下のように求まる。

$$f_2 = -mg\sin\theta + c\mu mg\cos\theta = -\boldsymbol{\frac{mg}{r}x + c\mu mg}$$

（$\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$, $x = r\theta$ を用いた。）

問５　物体に働く力の接線方向が０となる位置 x_O は、$f_2=0$ となる位置である。

$$f_2=-\frac{mg}{r}x_O+c\mu mg=0 \iff \boldsymbol{x_O=c\mu r}$$

また、問４の式を以下のように変形すると、この物体は単振動していることが分かる。

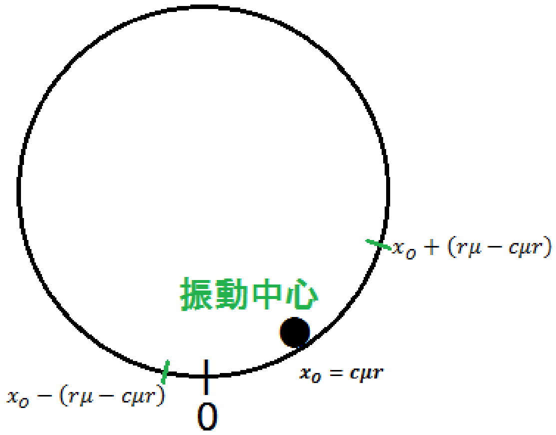
$$f_2=-\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c\mu mg}=-\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c\mu r})$$

単振動し始めた位置は角度が θ_O になったとき($x=r\theta_O$)であるので、この物体は中心が $x_O=c\mu r$ 、角振動数 ω 、振幅が $r\theta_O-c\mu r=r\mu-c\mu r$ の単振動をすることが分かる。

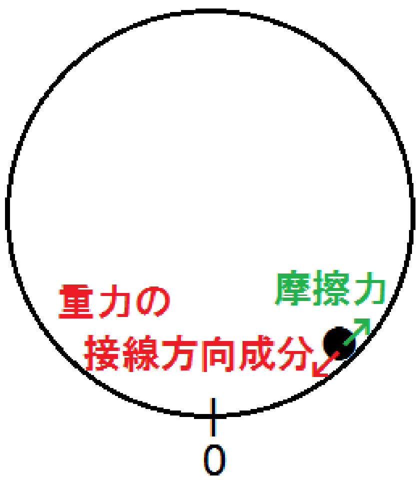
よって x の最小値 x_{MIN} は、左図より

$$x_{MIN}=x_O-(r\mu-c\mu r)=c\mu r-(r\mu-c\mu r)=\boldsymbol{(2c-1)\mu r}$$

と求まる。



問６　円筒を十分速い速度で反時計回りに回転させながら小物体を円筒の底に静かに乗せると、物体は単振動を始めた。



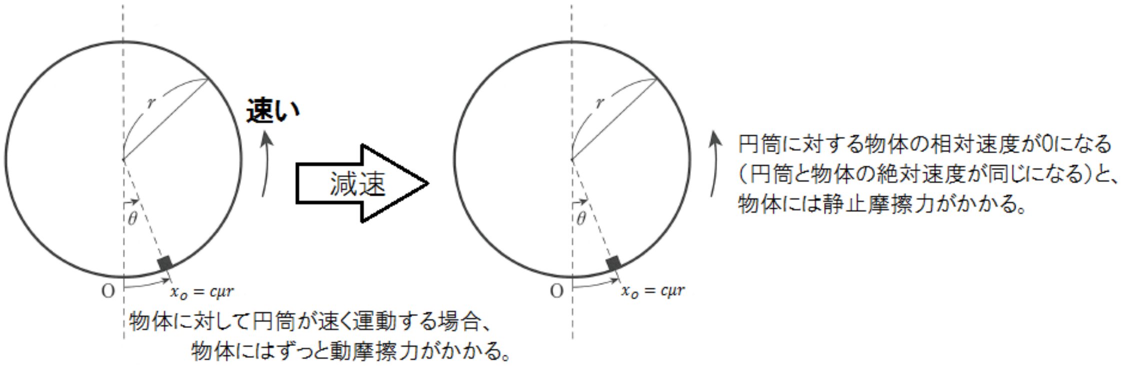
角度 θ (位置 $x=r\theta$)地点で、物体にかかる力の合力 f_3 は、以下の通りに表される。

$$f_3=-mg\sin\theta+c\mu mg\cos\theta=-\frac{mg}{r}x+c\mu mg$$

これは問３における運動方程式と同値であるので、この物体は中心が $x_O=c\mu r$ 、角振動数 ω の単振動をすることが分かる。ただし、単振動し始めた位置は角度が０のとき($x=0$)であるので、振幅は $\boldsymbol{c\mu r}$ である。

問７　円筒の角速度は徐々に減速し、やがてΩ_Oとなると、その円筒上に乗った物体の運動(単振動)の様子が変わる。運動の様子が変わるのは、物体にかかる力が何かしら変化するためであろう。

問５, ６で、円筒上の物体は、円筒の角速度が十分速ければ、振幅$c\mu r$の単振動をする。（円筒の角速度が十分遅ければ、振幅$(1-c)\mu r$の単振動をする。）ということが分かっている。すなわち、円筒の角速度Ω_Oが物体の角振動数ωよりも速ければ(物体の振動中心での速度が$r\Omega_O$より速ければ)、物体は振幅$c\mu r$の単振動をすることがわかる。



上図の解説中にある通り、円筒の角速度が遅くなることによって、振動する物体の絶対速度と同じになると、それは円筒からみると物体は止まって見えるということを意味しているので、物体には静止摩擦力がかかる。

すなわち「物体にはずっと動摩擦力がかかる」状態から「物体には静止摩擦力がかかる」状態に変化する。その変化のタイミングは、物体の振動中心での速度$c\mu r\omega$が円筒の速度$r\Omega_O$と一致するときである。よって下の式が成り立つ。

$$c\mu r\omega = r\Omega_O \ \rightarrow \therefore \ \Omega_O = c\mu\omega = \boldsymbol{c\mu\sqrt{\frac{g}{r}}}$$

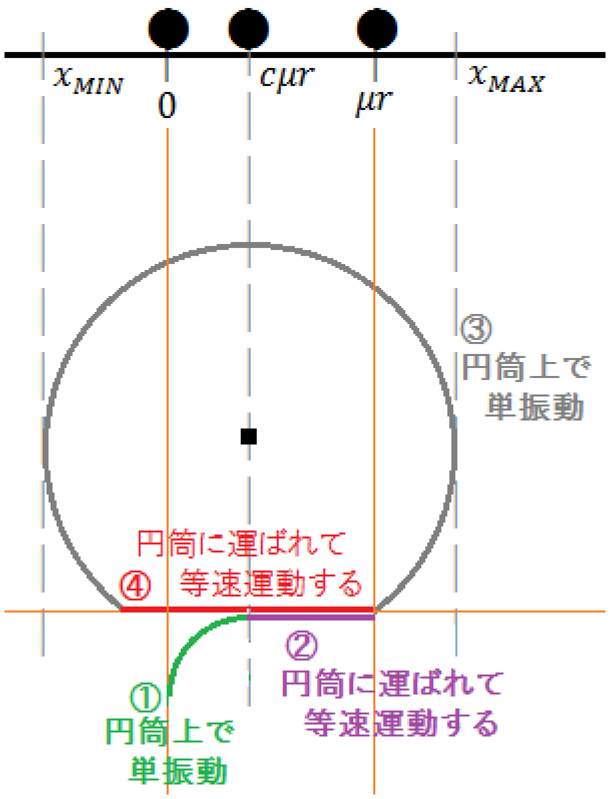
問８　物体は動摩擦力と重力の合力によって加速(単振動①)され、円筒と同じ速度$r\Omega_O$になると、静止摩擦力によって円筒上を等速で運ばれる(②)。その後、最大静止摩擦力と重力の接線方向成分のつりあいが破れる位置で再び単振動が始まる(③)。

最大静止摩擦力と重力の接線方向成分のつりあいが破れる位置をXとすると、

$$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta \Leftrightarrow \frac{mg}{r}X = \mu mg \ \Leftrightarrow X = \mu r$$

と求まる。

さらにその後、x_{MIN}を通過した物体は再び円筒と同じ速度$r\Omega_O$になり、再び静止摩擦力によって円筒上を等速で運ばれる(④)。このような往復運動を直線状の運動と疑似したものの参考円を次頁のように示す。



円筒に運ばれて等速運動し、最大静止摩擦力と重力の接線方向成分のつりあいが破れた後の単振動の式(単振動する物体の位置)を、以下のように表す。

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + c\mu r$$

（A：単振動の振幅、ϕ：単振動の初期位相）

また、$t = 0$ での初期条件が…

$$x(0) = A\sin\phi + c\mu r = \mu r$$

$$\frac{d}{dt}x(0) = A\omega\cos\phi = r\Omega_O = c\mu r\omega$$

…であることから、以下のことが分かる。

$$A^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \mu^2 r^2\{(1-c)^2 + c^2\}$$

$$\to A = \mu r\sqrt{1 - 2c + 2c^2}$$

以上より、単振動の式は以下のようになる。

$$x(t) = \mu r\sqrt{1 - 2c + 2c^2}\sin(\omega t + \phi) + c\mu r$$

よって、求める x の最小値 x_{MIN} は、以下の式で表される。

$$\therefore \boldsymbol{x_{MIN} = -\mu r\sqrt{1 - 2c + 2c^2} + c\mu r}$$

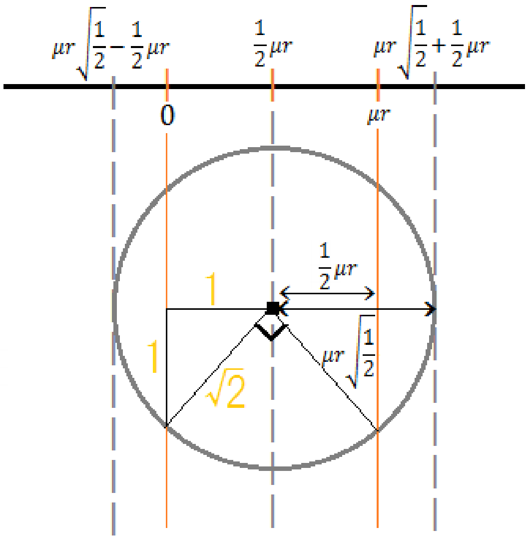
問 9　単振動①の中心は $x = c\mu r$ 、振幅は $c\mu r$ 、角振動数は ω 、周期は T である。その後、速度が $r\Omega_O$ になると等速運動②へ移行する。そして $x = \mu r$ に達すると単振動③(周期は T)を行う。この単振動の式 $x(t)$は、以下の式で表される。

$$x(t) = \mu r\sqrt{1 - 2c + 2c^2}\sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}\mu r = \mu r\sqrt{\frac{1}{2}}\sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}\mu r$$

さらに再び速度が $r\Omega_O$ になると等速運動②へ移行する。単振動①を行う時間を t_1 、等速運動②を行う時間を t_2 、単振動③を行う時間を t_3 、等速運動④を行う時間を t_4 とすると、それぞれ以下のような関係式が成り立つ。

$$t_1 = \frac{1}{4}T \quad 、\ \mu r - \frac{1}{2}\mu r = \frac{1}{2}\mu r = r\Omega_O t_2$$

$$t_3 = \frac{3}{4}T \ 、\ 2\left(\mu r - \frac{1}{2}\mu r\right) = \mu r = r\Omega_O t_4$$



これより…

$$t_1=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$t_2=\sqrt{\frac{g}{r}}=\frac{1}{2\pi}T$$

$$t_3=\frac{3}{4}T=\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$t_4=2\sqrt{\frac{g}{r}}=\frac{1}{\pi}T$$

…であることがわかる。

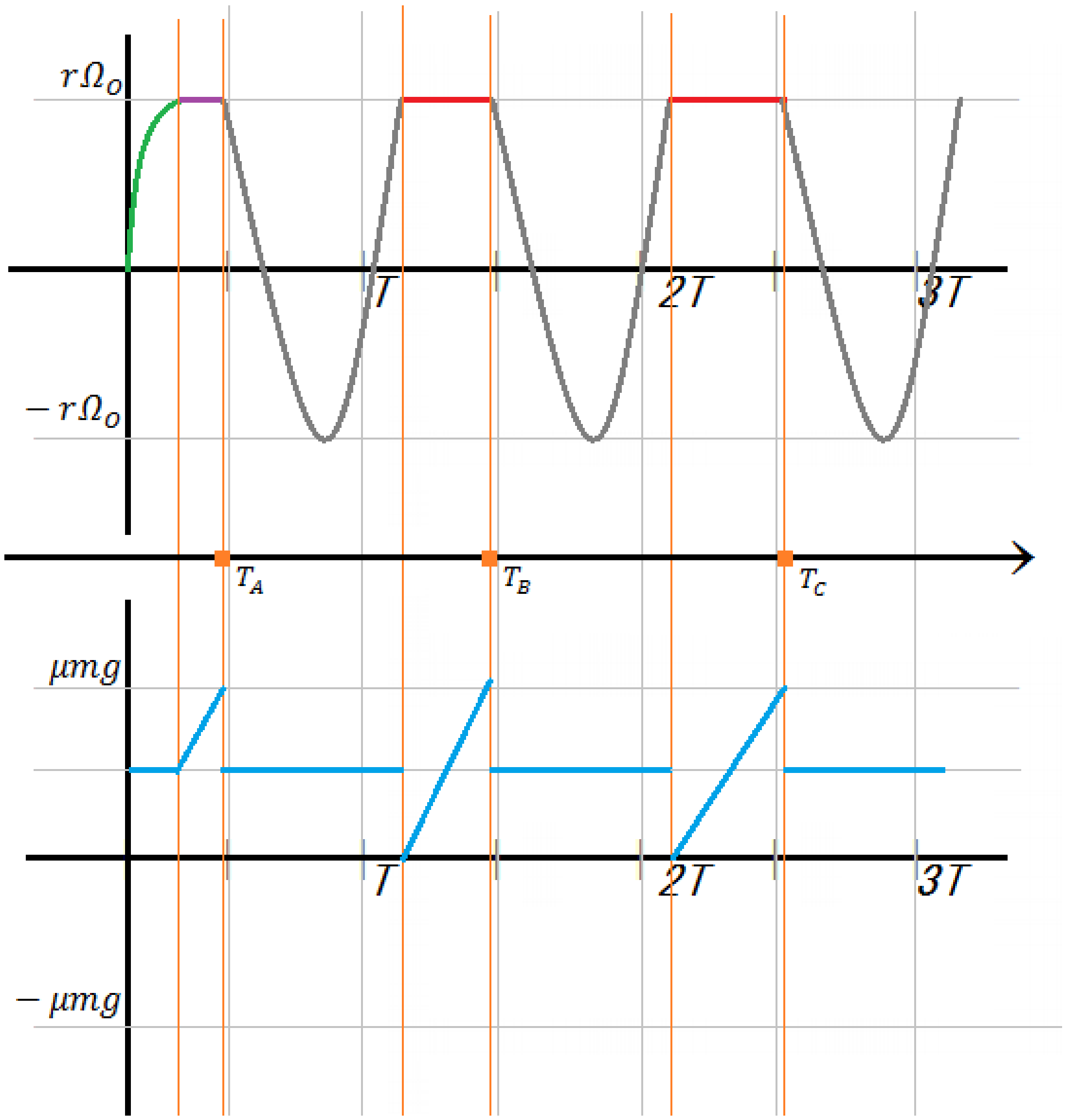
また、振動し始めて$3T$までの時間で、物体の速度が減少に転じる回数は 3 回である。この時の時刻をそれぞれ T_A ,T_B, T_C とすると、それぞれの値は次のように求まる。

$$T_A=t_1+t_2=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\right)\boldsymbol{T}\text{ , }T_B=T_A+t_3+t_4=\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\right)\boldsymbol{T}$$

$$T_C=T_B+t_3+t_4=\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\right)\boldsymbol{T}$$

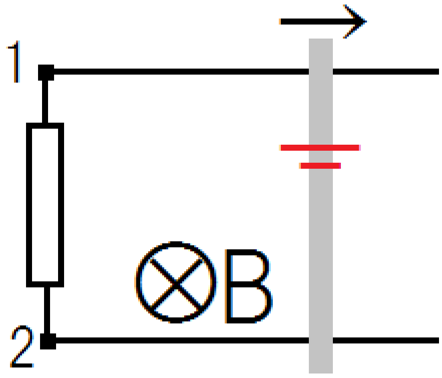
さらに、円筒が物体に及ぼす力の接線方向とは「物体にかかる摩擦力」のことである。
単振動①では動摩擦力がかかる。その後、等速運動②では静止摩擦力が最大静止摩擦力になり、単振動③では動摩擦力がかかる。

この一連の動きをグラフにしたものが次頁のものになる。



$r\Omega_o$
$-r\Omega_o$
T
$2T$
$3T$
T_A
T_B
T_C
μmg
$-\mu mg$
T
$2T$
$3T$

[Ⅲ]



問 1

端子間 1,2 の電位差は、導体棒が磁場を切ることによって発生する誘導起電力に相当するので、求める電位差は $\boldsymbol{Bv\ell}$ である。

また、この誘導起電力によってこの回路に電流が流れ、この電流が磁場中を通るためにローレンツ力がかかる。導体棒に流れる電流を I とすると、キルヒホッフの法則より次の式が成り立つ。

$$Bv\ell = IR \Leftrightarrow I = \frac{Bv\ell}{R}$$

よって求めるローレンツ力 F は、x 軸負方向にかかるので、以下の式が成り立つ。

$$\therefore F = -BI\ell = -\frac{\boldsymbol{B^2v\ell^2}}{\boldsymbol{R}}$$

問 2　$t = 0$で導体棒が持っていた運動エネルギーがすべて抵抗でジュール熱として使われたと考えられる。消費されたジュール熱を J とすると、エネルギー保存則より、以下の式が成り立つ。

$$\therefore \boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2 = J}$$

問 3　端子間にブラックボックスを接続して電流を流すことで発生するローレンツ力によって、導体棒の速度は等加速度を持って減速する。この加速度を a とする。これより導体棒における運動方程式は、下のように立式できる。

$$ma = F \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{B^2v\ell^2}{mR}$$

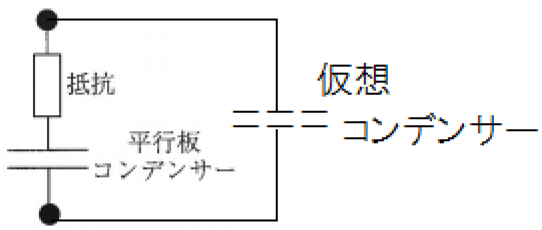
また、電位差の変化 ΔV は 導体棒の速度変化 $\boldsymbol{\Delta v}$ によるので、設問中の与式は…

$$\frac{F\Delta t}{\Delta V} = F\frac{\Delta t}{B\Delta v\ell} = \frac{F}{B\ell}\left(\frac{\Delta t}{\Delta v}\right)^{-1} = \frac{F}{B\ell}\left(\frac{\Delta t}{\Delta v}\right)^{-1} = \frac{F}{B\ell}a = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{B\ell}}$$

…と変式できる。

問 4「単位時間あたりに流れ込む電気量の大きさ」を「電流の大きさ I 」と定義されているため、この仮想コンデンサーに微小時間 Δt に流れ込む電気量 ΔQ は $I\Delta t$ と表される。これより、設問中の与式は、下のように変式できる。

$$\therefore \boldsymbol{C_0} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = I\frac{\Delta t}{\Delta V} = \frac{Bv\ell}{R}\frac{1}{F}\frac{m}{B\ell} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{B^2\ell^2}}$$



問 5
　$t=0$における導体棒の速度は v_O であるので、端子 1,2 間の電位差(導体棒の誘導起電力)は $Bv_O\ell$ である。よって仮想コンデンサーに蓄えられている電気量 Q_O は以下のように求まる。

$$\therefore Q_O = C_O\, Bv_O\ell = \boldsymbol{\frac{m}{B\ell}v_O}$$

問 6　導体棒の速度が一定となった時、仮想コンデンサー間の電位差と平行板コンデンサー間の電位差はそれぞれ等しい。また電荷保存則より、両コンデンサーに蓄えられる電気量もそれぞれ等しい。導体棒の速度が一定となった時に仮想コンデンサーに蓄えられている電気量をQ_1、平行板コンデンサーに蓄えられている電気量をq_1とすると、以下の 2 式がなりたつ。

$$\frac{q_1}{C} = \frac{Q_1}{C_O} \quad 、Q_O = Q_1 + q_1$$

これより、平行板コンデンサーに蓄えられている電気量q_1は、次のように求まる。

$$\therefore \boldsymbol{q_1} = \frac{C}{C+C_O}Q_O = \frac{C}{C+C_O}\frac{m}{B\ell}v_O = \boldsymbol{\frac{CC_O}{C+C_O}Bv_O\ell}$$

問 7　十分時間が経った後の導体棒の速度をv'とすると、仮想コンデンサー間の電位差は、この導体棒で誘導される起電力と同値なので、以下の式が成り立つ。

$$\mathrm{B}v'\ell = \frac{Q_1}{C_O} = \frac{1}{C_O}\frac{{C_O}^2}{C+C_O}Bv_O\ell$$

$$\therefore \boldsymbol{v'} = \boldsymbol{\frac{C_O}{C+C_O}v_O}$$

問 8　発生したジュール熱をJ'とすると、エネルギー保存則より、以下の式が成り立つ。

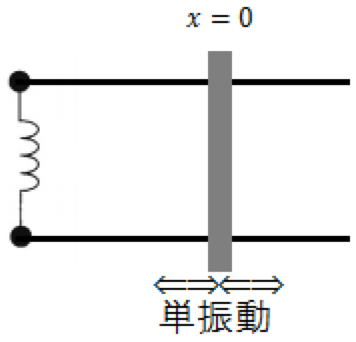
$$\frac{1}{2}m{v_O}^2 = J' + \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{{q_1}^2}{2C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{{Q_O}^2}{2C_O} = J' + \frac{{Q_1}^2}{2C_O} + \frac{{q_1}^2}{2C}$$

　これより、発生するジュール熱J'と、$t=0$での導体棒の運動エネルギーは下のように求められ、以下のことが分かる。

$$J' = \frac{1}{2}\frac{CC_O}{C+C_O}(Bv_O\ell)^2 \quad 、\frac{1}{2}m{v_O}^2 = \frac{{Q_O}^2}{2C_O} = \frac{1}{2}C_O(Bv_O\ell)^2$$

$$\therefore J' = \frac{C}{C+C_O}\frac{1}{2}C_O(Bv_O\ell)^2 = \boldsymbol{\frac{C}{C+C_O}}\frac{1}{2}m{v_O}^2$$

問 9　端子 1,2 間にコイルを接続させると、電気振動が起こり、導体棒は単振動する。



この導体棒が単振動するのは、ローレンツ力が復元力の役割を果たすためである。よって導体棒における運動方程式は、導体棒に流れる電流を I' とすると、以下のようになる。

$$m\omega^2 x = -BI'\ell$$

（導体棒を上方向へ流れる電流の向きを正とする）

以上より、流れる電流は以下のように表される。

$$\therefore \boldsymbol{I' = -\frac{m\omega^2}{B\ell}x}$$

問 10「インダクタンス」とは、まわりの電流との反抗(抵抗)度合いを意味する物理量である。このコイルの自己インダクタンスを L 、ある時刻での導体棒の速度を v とすると、その導体棒には $Bv\ell$ の起電力がかかるので、以下の式が成り立つ。

$$Bv\ell = -L\frac{dI'}{dt} = L\frac{m\omega^2}{B\ell}\frac{dx}{dt} = L\frac{m\omega^2}{B\ell}v \iff \therefore \boldsymbol{L = \frac{(B\ell)^2}{m\omega^2}}$$